

A.M.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ
!!! μόνον άρτιοι !!!			

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ Α.Μ.
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016

1. Εξετάστε αν ισχύει καθένα από τα ακόλουθα. Αν ισχύει, δώστε **πλήρη απόδειξη**. Αν δεν ισχύει, δώστε κατάλληλο **αντιπαράδειγμα**.

- (i) **(3%)** Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι **φραγμένη**, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **συγκλίνει**.
- (ii) **(3%)** Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ **συγκλίνει**, τότε **και οι δυο** σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν.
- (iii) **(3%)** Αν μια συνάρτηση είναι **ομοιόμορφα συνεχής**, τότε η παράγωγος της **υπάρχει** και είναι **φραγμένη**.
- (iv) **(3%)** Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε **ανοικτό** διάστημα και είναι **συνεχής**, τότε σίγουρα **δεν** είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- (v) **(3%)** Αν μια συνάρτηση είναι **ολοκληρώσιμη**, τότε είναι υποχρεωτικά **ομοιόμορφα συνεχής**.
- (vi) **(3%)** Αν η $f : [0, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ είναι **φραγμένη**, τότε το χωρίο που καθορίζεται από το γράφημα της και τον άξονα των x , έχει **πεπερασμένο εμβαδόν**.
- (vii) **(3%)** Αν μια συνάρτηση είναι **ολοκληρώσιμη**, τότε **όλα** τα κάτω αθροίσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν είναι μεταξύ τους **ίσα**.
- (viii) **(3%)** Αν το **ολοκλήρωμα** μιας συνάρτησης ισούται με μηδέν, τότε η **συνάρτηση** είναι παντού μηδέν.
- (ix) **(3%)** Αν μια συνάρτηση έχει **ένα μόνον** σημείο ασυνέχειας, τότε είναι **ολοκληρώσιμη** και το αόριστο ολοκλήρωμα της είναι **παραγωγίσιμη** συνάρτηση.
- (x) **(3%)** Αν το **γινόμενο** δυο συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε **κάθε μια** από τις δυο είναι ολοκληρώσιμη.

2. (10%) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \int_{-\cos x}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

είναι **σταθερή**.

3. (10%) Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{1}{7}.$$

4. (10%) Ας είναι $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Παραγωγίζοντας τα δύο μέρη, αποδείξτε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du, \quad x \in [0, 1].$$

5. (10%) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \\ 1, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον σχετικό $(\epsilon - \delta)$ ορισμό, δείξτε ότι η f **δεν** είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6. (10%) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=10}^{+\infty} (-1)^{n+2} \cos \frac{n}{n^2 + 2}.$$

7. (10%) Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $(-1, -1)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$ χωρίζεται από τους άξονες σε τρία χωρία. Υπολογίστε τα εμβαδά αυτών των χωρίων, **χωρίς** να θεωρήσετε γνωστό ότι το εμβαδόν E του κύκλου ακτίνας r δίνεται από τον τύπο $E = \pi r^2$.

8. (10%) Ας είναι $n \in \mathbb{N}$ και $T_{n,f,x_0}(x)$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού n , γύρω από το σημείο x_0 , για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε την **τιμή** της $(2n)$ -τάξης παραγώγου $T_{2n,f,0}^{(2n)}(0)$.